乗法に関する一考察

−スキーマとしての長方形に着目して−

A Consideration for the Calculations of Multiplication

−At the viewpoint of the Rectangle Schema−

伊東 直人

鈴鹿大学(愛知みずほ短期大学非常勤講師)

Naoto ITO

Suzuka University(Aichi Mizuho Junior College(Part-time Lecturer))

要旨

小学校における算数科の指導において,乗法が用いられる場面は 3 通りある. 第 1 は小学校 2 年生における(1 あたりの数)×(いくつ分)によって(全体の数)を求める乗法である. これは小学校高学年における(単位あたり量)×(分量)＝(全体量)の乗法と構造的に同じである. 第 2 は小学校 4 年生での(長さ)×(長さ)によって(面積)を求める乗法であり,体積を求める乗法も構造的に同じである. 第 3 は(もとの量)×(整数)＝(あとの量)という整数倍の乗法であり,小学校高学年での割合に関する乗法も構造的に同じである. 第 1 の乗法の構造は線織構造(Fiber Structure),第 2 の乗法の構造は直積構造(Product Structure),第 3 の乗法の構造は複製構造(Copy Structure)と呼ぶことができる.

キーワード：乗法; 長方形スキーマ; 整数倍; 乗法九九

Key word：Multiplication;, Rectangle Schema; n-times; Multiplication-table

Ⅰ. はじめに

小学校における「数と計算」領域における乗法,除法の指導はそれぞれ小学校 2 年生,3 年生から始められる. 小学校 2 年生の乗法についての指導内容を概括すると,

［第 1 段階］乗法の意味
［第 2 段階］乗法のためのスキーマ
［第 3 段階］乗法九九
［第 4 段階］整数倍の乗法

の 4 段階に分けられ,小学校 3 年生の除法の指導内容については,

［第 1 段階］除法の意味
［第 2 段階］除法のためのスキーマ
［第 3 段階］除法の計算

の 3 段階に概括される.

4 年生以降の「数と計算」領域における乗除の指導は,2 年生の乗法,3 年生の除法での指導内容が基盤となって行われるものである. ただし,4 年生の「図形」領域の指導内容である面積を求める指導については乗法の構造が違う. 以下において,「数と計算」領域における乗法の構造と指導について論述する.

Ⅱ. 乗法の意味について

1. 二次元的な計算としての乗法

私たちが日常生活において乗法を用いる場面を考えると,たとえば「1 枚 63 円のハガキを 5 枚買ったときの代金」を計算するとき,63×5＝315 のように計算する. つまり,「1 枚あたりの値段」と「枚数がいくつあるか」がわかっているときに乗法が用いられる. このような場面は「1 箱あたりの……」「1 袋あたりの……」「1 台あたりの……」のように種々あるから,それを統合的に「1 あたりの数」と呼ぶことにする. また,それがいくつあるかを表す言葉として「いくつ分」を用いることにすると,乗法は「(1 あたりの数)×(いくつ分)＝(全体の数)」という計算になる.

小学校低学年では扱われる量は分離量であるから,枚数,本数,個数,台数……などは「負でない整数」(以下,整数はこの意味で使用する)で表されるが,小学校高学年になれば連続量を扱うことになり,たとえば 5 年生

の「変化と関係」領域で扱われる速さの問題で「1 分間に 3. 2m 歩くロボットがある. このロボットは 2. 5 分間では何 m 歩きますか」というような「速さ×時間＝距離」という場面に乗法が使用される. この場合には「1 あたりの数」「いくつ分」というよりは「単位あたり量」「分量」と呼ぶほうが適切であると考えられることから,乗法は「(単位あたり量)×(分量)＝(全体量)」と表現することができるが,乗法の構造としては低学年の場合と高学年の場合とは同じである.

この乗法の構造は「いくつ分」あるいは「分量」を土台とし,その上に「1 あたりの数」あるいは「単位あたり量」が縦糸のように立てられており,図 1 のように図示される. その意味において「線繊構造」(Fiber Structure)と呼ぶことができる. そして,この線繊構造こそが乗法の第一義的な意味である.

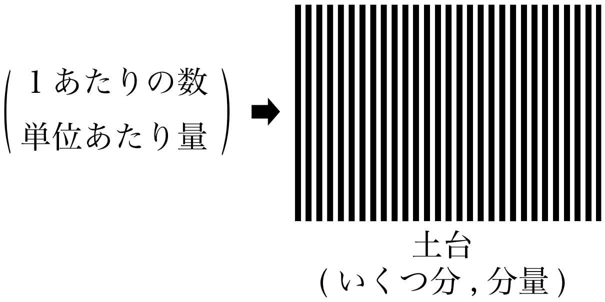

図 1 . 乗法の線繊構造

上記のロボットの問題は単位を付けて「3. 2m/分×2. 5 分＝8m」と表され,同様の表し方をハガキの問題に適用すれば「63 円/枚×5 枚＝315 円」と表される. つまり,被乗数と乗数は量的な意味が異なるのである. これに対して,加法では「4 枚＋3 枚＝7 枚」などのように,被加数と加数の量的意味は同じである. これが加法と乗法の本質的な相違点であり,加法は線型構造(Linear Structure)を持つ一次元的な計算であり,乗法は線繊構造を持つ二次元的な計算と言える.

2. 面積計算としての乗法

ここでは小学校 2 年生の指導内容ではないが,後述する乗法のスキーマに深い関わりがあることから,小学校 4 年生の「図形」領域の面積計算について論述する. よく知られているように,長方形の面積を計算する場合にも乗法が用いられる. たとえば,縦が 3m,横が 4m の長方形の面積は「$3m \times 4m = 12m^2$」と計算される. この計算式における被乗数と乗数の単位は同じであるから,前述した計算式である「3. 2m/分×4. 5 分＝14. 4m」における単位とは明らかに異なっている. これは乗法としての意義が異なっているからである. さらに,面積計算では「長さと長さを掛けて面積という新しい量」が生み出されているから,「長さと長さを足して長さを得る」という加法と比べると,乗法という演算は加法とはまったく異なる演算であることがわかる. なお,体積についても面積と同種である.

乗法という演算を加法の繰り返しを簡便化したもの(累加)として意味づける指導があるが,それは実は誤りであり,法則を定式化することと,その計算をすることとを混同している. 3×4 は 3＋3＋3＋3 として答えを得ることはできるが,それは単なる手段であって,加法によって乗法の法則を意義づけることは不可能である.

面積計算に現れる乗法は前述した線繊構造を持つ乗法とも異なっていて,直角に交わった縦線と横線の 2 直線によって新たな量を構成する意義を持っているのであり,数学用語である「直積」を用いて直積構造(Product Structure)と呼ぶことができる. そして,この直積構造を表象する長方形こそが乗法のスキーマ(構造理解)として最適なのである.

Ⅲ. 乗法のためのスキーマについて

1. 乗法の導入

小学校 2 年生における乗法の導入は「(1 あたりの数)×(いくつ分)＝(全体の数)」という第一義的な意義に従って行われるべきである. たとえば,1 袋に 3 個のみかんが入っている状態を図 2 のように表すことにする. このような袋が 4 つあれば,図 3 のように表すことになる. ここでは,1 あたりの数は 3,いくつ分は 4 であるから,3×4＝12 となる.

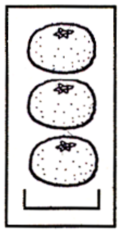

図 2. 1 袋にみかん 3 個

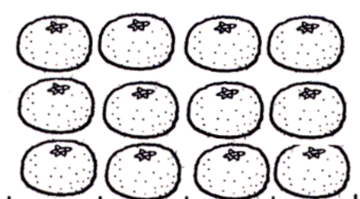

図 3 . 4 袋分のみかん

具体的な多くのみかんの絵を描くには手間がかかるから,みかんを正方形に置き換えると図 4 のようになる. これは前述した乗法の線繊構造を示している. さらに,正方形の数が多くなれば,描く手間を省くために図 5 のような長方形の図を使用することが適切である.

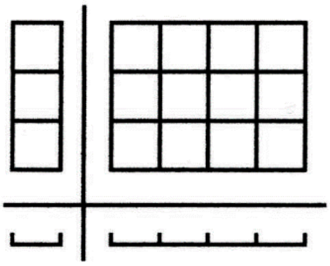

図 4．正方形による乗法の線織構造

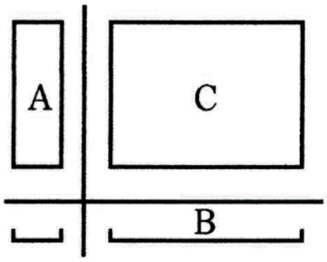

図 5. 長方形スキーマによる乗法の構造

図 5 においては,A が「1 あたりの数」,B が「いくつ分」,C が「全体の数」を表している. したがって,数が大きくなって小正方形を多く描くことが困難になった場合,A,B,C の欄に数値を書き込めばよいわけである.

2. 乗法計算のための長方形スキーマ

スキーマ(schema)とは人間が概念や法則を認知したり,外界にはたらきかけたりするときの土台となる思考の内的な枠組みのことであり,乗法に関する有効なスキーマは長方形を用いた図 5 であると言える. したがって,本論稿では乗法の計算指導において使用される長方形の図を「長方形スキーマ」と呼ぶことにする.

長方形スキーマは小学校 2,3 年生における乗法の指導にとって有効であり,さらに小学校 4 年生の面積指導においてもそのまま使用することができる. そして,小学校高学年における「速さ,時間,距離」などの指導においても,図 6 のような形で使用できる.

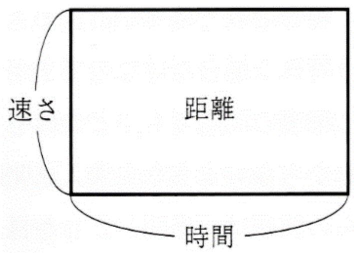

図 6．長方形スキーマによる速さ・時間・距離の関係

このような長方形スキーマの使用は目新しいものではない. 今から約 190 年前の天保元年(1830 年)に和算家・千葉胤秀(たねひで)が刊行した『算法新書』(千葉,1830)には「雞と兎が合わせて 100 頭いて,足数は合計 284 本である. 雞と兎はそれぞれ何頭か」という“雞兎算”が掲載されていて,この問題が図 7 のような長方形スキーマを用いて解かれているのである. ここでは,雞,兎は「匹」ではなく「頭」と数えられている.

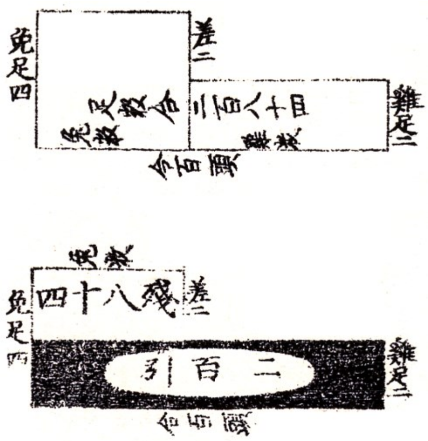

図 7．長方形スキーマによる雞兎算の解法

図 7 の上図では,左端の「兎足四」及び右端の「雞足二」はそれぞれ兎 1 頭あたりの足数が 4 本,雞 1 頭あたりの足数が 2 本であることを表し,底辺は「兎数と雞数が合わせて百頭」であることを示している. そして,左側の長方形が兎全部の足数,右側の長方形が雞全部の足数を表しているのであるから,「(1 あたりの数)×(いくつ分)＝(全体の数)」が長方形スキーマによって見事に表現されていることになる. この長方形スキーマを使用すれば,鶴亀算の解法でよく知られている「全部を鶴と考えれば……」というような不自然な解法は不必要になる. このように,長方形スキーマは乗除に関わる問題にきわめて大きな効果を発揮するのである.

Ⅳ. 乗法九九について

1. 数 0～9 の乗法

乗法の第一義的な意義にもとづく導入の次の段階は乗法九九(以下,単に「九九」とする)の指導である. 数 0～9 の乗法は全部で 100 通りあるが,数 0 を含む乗法は特別な場合として,後で扱うことにすれば,重要な場合は数 1～9 についての九九の指導ということになる. したがって,数 0～9 の乗法計算の指導の順序は「九九の指導 → 0 と 1～9 の乗法 → 0×0」となる.

九九は後続するすべての乗法計算の基礎になるものであるから,時間をかけて指導しなければならない. しかし,たとえば繰り上がりのある加法計算では,その求答方法に一定の手順を見出すことができるが,九九の求答方法にそのような手順は存在しない. もっとも,たとえば 6×7 の答えが 42 であることは何らかの方法に

よって確認しなければならないが,その方法(行為)を81 通りの九九計算それぞれについて,その都度行うことは手間がかかる. したがって,九九については丸暗記することが効率が良い. 幸い日本語の数詞は十進法的であり,語呂よく"歌"のようにして覚えることができる.

九九の指導順序としては語呂のよい 2 の段あるいは 5 の段から始めるのが適切である. 例えば多くの数を数えるとき「に,し,ろく,は,とお,……」とか「ご,じゅう,じゅうご,にじゅう,……」などの呼び声を用いている. したがって,「2 の段→5 の段」あるいは「5 の段→2 の段」と指導した後,3→4→6→7→8→9→1 と続けるのが 1 つの指導順序であるが,この順序でなければならないという確たる根拠はない.

一般的に,8×7(はち・しち)などのように,先唱数が後唱数より大きい場合の九九は覚えにくい傾向にあるから,練習の時間が多く必要になる. そして,実際の指導では,ある段を指導した後,次の段に移るとき,前に指導した段の復習をすることが多い. したがって,7,8,9 の段を先に指導して,練習時間を多く確保することも考えられる. また,9 は 10 より 1 少ない数であるから,たとえば 9×3(く・さん)の答えは 10×3=30 を踏まえて,「30−3＝27」と求められるから,7,8 の段より先に指導するという考え方もある. したがって,2,5 の段の指導後の指導順序はさまざまである.

なお,現在では,九九の呼び声は 3×4＝12 を「さん,し,じゅうに」と唱えるように,被乗数先唱法が採用されている.

2. 指計算による九九

先唱数が後唱数より大きい場合の九九は覚えにくい. したがって,乗法の交換法則を用いて,たとえば,8×7(はち・しち)は 7×8(しち・は)と唱え換えて答えを得るようにすることもできるが,九九指導の段階では乗法の交換法則を利用するまでに至っていないから,天下り的な指導にならざるをえない. また,除法計算において商を見出す場合には九九を使用することになるから,やはり 81 個の九九の呼び声を習得させることが必要である.

先唱数が後唱数より大きい場合の九九については,指を用いる方法が知られている. 片手で数を数えるときは,親指から折り曲げていき,5 で全部の指が折り曲げた状態になる. 続く 6 では小指が立ち,7 は小指と薬指が立った状態になる. 図 8 の左手は 8 を,右手は 7 を示していて,8×7(はち・しち)の場合の指計算を表している. 立っている指は 1 本を 10 とするので「50」となる. 折り曲げている指は 2 と 3 であるから,これを掛けて「6」となる. 合計して 50＋6＝56 となる.

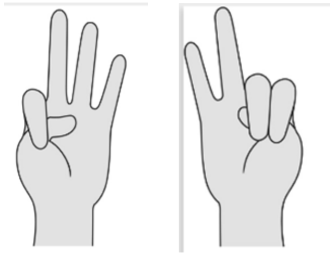

図 8　はち・しち(8×7)の指計算

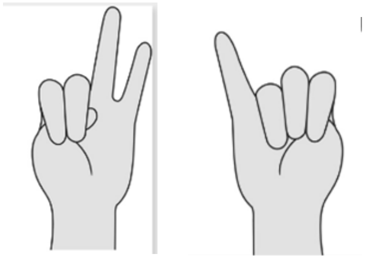

図 9　しち・ろく(7×6)の指計算

(図 8,9：illust AC から素材をダウンロード)

また,7×6(しち・ろく)を表している図 9 では,立っている指は 2 と 1 であるから「30」であり,折り曲げている指は 3 と 4 であるから,掛けて「12」となり,合計して 30＋12＝42 となる. この方法は 6 以上の九九について常に成立する. ただし,5 以下の九九は覚えておかなければならないが,数 1～5 の九九(全部で 25 通り)を覚えるのは比較的容易である.

3. 九九計算器の利用

九九を覚えるためには,次のような計算器を利用することも考えられる. 図 10 は数 1～9 から構成された土台表であり,図 11 は逆 L 字型の道具で,いずれも厚紙などで作製したものである. 逆 L 字型の道具を土台表の上に置くことによって,望む九九の答えを見出すことができるのである. この土台表では縦の数字が被乗数,横の数字が乗数を表している. さらに,縦・横ともに,数 5 で太い区切り線が付けられている. これは「5 のかたまり」を明示的にするためで,これによって 5 と 5 で 10 という理解が容易となる.

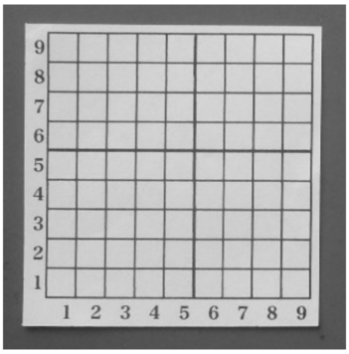

図 10　九九計算器のための土台表

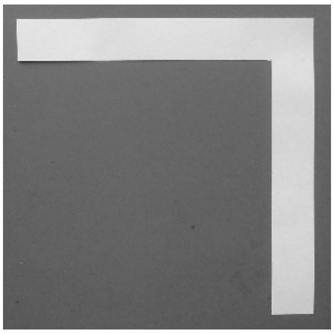

図 11　九九計算器のための逆 L 字型の道具

たとえば,6×4(ろく・し)の場合を例にすれば,図 12 のようになり,縦線の最上部が 6(被乗数),横線の右端が 4(乗数)であるから,6×4(ろく・し)を表している. そして,逆 L 字型の道具に囲まれた部分が 6×4 の答えとなる. それは「5 のかたまり」が 4 つで 20 であり,小正方形 4 つを合わせて 24 となる. すなわち「ろく, し,にじゅうし」である.

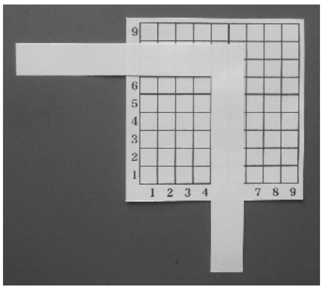

図 12　九九計算器による 6×4

Ⅴ. 整数倍の乗法について

1. 操作・関係としての整数倍

小学校 2 年生の乗法指導の最後は倍(整数倍)の指導である. たとえば,「5cm のテープの 2 つ分,3 つ分,……」は図 13 のようになるが,これを「5cm の 2 倍」,「5cm の 3 倍」,……と言い,計算式は「5cm×2＝12cm」,「5cm×3＝15cm」と表される. この乗法は(1 あたりの数)×(いくつ分)＝(全体の数)とは量的な意味が異なり,(はじめの量)×(整数)＝(あとの量)と表現することができる. つまり,前者が量×量＝量であるのに対して,後者は量×数＝量なのである.

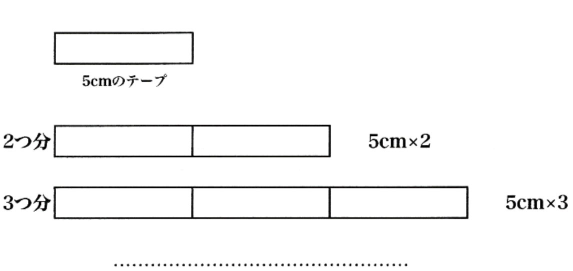

図 13　テープ(長さ)の整数倍

この整数倍の乗法はあるモノのコピーを 2 つ,3 つ,……作るという「操作」をイメージさせることから,その構造は複製構造(Copy Structure)と呼ぶことができる. ただ,この複製構造は「はじめの量」と「あとの量」の関係を示すこともあるから,広い意味では 2 つの量の関係的な構造を表現していると言える. それは小学校高学年の割合に関する計算として現れる. こうして,乗法が用いられる場面には下記のように 3 通りあることになり,それらの構造はそれぞれ次のようになる.

(1)(1 あたりの数)×(いくつ分)＝(全体の数)
　→ 線織構造
(2)(長さ)×(長さ)＝(面積)
　→ 直積構造
(3)(はじめの量)×(整数)＝(あとの量)
　→ 複製構造

2. 整数倍のためのスキーマ

整数倍の計算は線織構造や直積構造を持つ乗法(量×量)とは異なり,複製構造にもとづく操作的・関係的な乗法(量×数)であるから,長方形スキーマは適切ではない. たとえば,ある長さのテープを 4 倍する場合の図式は図 14 のように矢印を用いて表される. また,2 つの量A,Bの関係が何倍になっているかを表す場合には図 15 のようになる. これは A と B の関係を一般的に表すスキーマであるから「関係スキーマ」と呼ぶことができる.

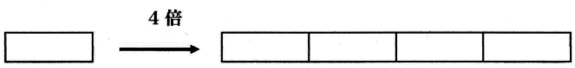

図 14　ある長さの 4 倍

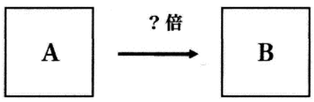

図 15　関係スキーマによる整数倍の構造

この関係スキーマは整数倍の乗法の場合だけでなく,逆演算としての除法の指導においても有効性を発揮することになる.

Ⅵ. おわりに

本論稿においては小学校の乗法の計算指導についての考察を試みた. その結果,乗法の構造には 3 通りがあり,それぞれを線織構造(Fiber Structure),直積構造(Product Structure),複製構造(Copy Structure)と呼ぶことにした.

これらの考察によって,小学校での乗除の計算指導を一層緻密なものにすることができると考えている.

本稿においては,実際の指導に即した指導案や指導計画,授業実践にまで述べることができなかった. 今後の研究として,乗除の構造を踏まえた指導について,授業実践に基づく研究へと展開しその検証が必要である.

引用文献

千葉胤秀(1830) 算法新書 2 版. 国立国会図書館デジタルコレクション. https://dl.ndl.go.jp/pid/829145/1/61 「2023.12.25 最終閲覧」